Sous-groupes distingués et caractères

Thm : Soit G fini de caractères irréductibles $\chi_1, \dots, \chi_m$.

Les sous-groupes distingués de G sont les $\bigcap_{j\in J} \ker \chi_j$, $J \subset [\![1,m]\!]$.

où $\ker \chi_j = \{g \in G, \chi_j(g) = \chi_j(e)\}$.

Lem. Soit $\rho : G \to GL(V)$ représentation de G de caractère χ. $\ker \rho = \ker \chi$.

Si $g \in G$, $\rho(g)^{\#G} = id$ donc est diagonalisable, de valeurs propres λ_j racines de 1.

$\chi(g) = \sum_{j=1}^{\dim V} \lambda_j$ donc $|\chi(g)| \leq \dim V = \chi(e)$.

$g \in \ker \chi \Leftrightarrow \chi(g) = \chi(e) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \dots = \lambda_{\dim V} & \text{(cas égalité)} \\ \lambda_1 \dim V = \dim V \end{cases} \Leftrightarrow \rho(g) = Id_V \Leftrightarrow g \in \ker \rho$

· Soit $H \triangleleft G$. G agit sur G/H par translation à gauche. soit $\varphi : G \to \mathfrak{S}_{G/H}$ associé.

Soit χ caractère associé à la repr par permutations $\rho_\varphi : G \to GL(V)$, $\dim_{\mathbb{C}} V = |G/H|$

$\ker \chi = \ker \rho_\varphi = \ker \varphi = H$. H est noyau d'un caractère.

· Soit χ associé à $\rho : G \to GL(V)$ avec $V = \bigoplus_{i=1}^{s} [V_i \oplus \dots \oplus V_i] = \bigoplus_{i=1}^{s} a_i V_i$

décomposition en sous-représentations irréductibles, de caractères $\chi_1, \dots, \chi_s$.

$g \in \ker \chi \Leftrightarrow g \in \ker \rho \Leftrightarrow g \in \ker \rho_{V_i}, \forall i \Leftrightarrow \forall i, g \in \ker \chi_i$

Donc $\ker \chi = \bigcap_{i=1}^{s} \ker \chi_i$